DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2018.01.008

# 带非线性延迟项的分数阶微分积分方程收敛性*

郑伟珊
（韩山师范学院数学与统计学院，广东 潮州 521041）

**摘　要：**采用 Jacobi 谱配置方法研究带非线性延迟项的分数阶微分积分方程，通过适当的线性变换后利用雅可比高斯求积公式求近似解和近似导数，并给出严格的误差分析，证明了在无穷范数和加权 $L^2$ 加权范数中精确解与近似解，精确导数与近似导数的误差均呈指数衰减。

**关键词：**Jacobi 谱配置方法；非线性延迟项；分数阶导数；微分积分方程；高斯求积公式；收敛分析

**中图分类号：**O242.2　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529 – 6579（2018）01 – 0055 – 08

# Convergence analysis for fractional integral and differential equation with nonlinear delay

*ZHENG Weishan*
（College of Mathematics and Statistics, Hanshan Normal University, Chaozhou 521041, China）

**Abstract:** The fractional integral and differential equation with nonlinear delay is studied with Jacobi spectral-collocation method. After proper linear transformation, an approximate solution and an approximate derivative of the solution are obtained by Gauss quadrature formula. By Jacobi collocation discretization, a rigorous error analysis is provided to show that the error of the approximate solution and the error of the approximate derivative both decay exponentially in the infinity norm and the weighted $L^2$ – norm.

**Key words:** Jacobi spectral-collocation method; nonlinear delay; fractional derivative; the fractional integral and differential equation; Gauss quadrature formula; convergence analysis

分数阶微分积分是关于任意阶微分和积分的理论，它与整数阶微分积分是统一的，是整数阶微分积分的推广。整数阶微分积分作为描述经典物理及相关学科理论的解析数学工具已为人们普遍接受，不少问题的数学模型最终都归结为整数阶微分积分方程的定解问题，其无论在理论分析还是数值求解方面都已有较完善的理论。但当进入到复杂系统和复杂现象的研究时，经典整数阶微分积分方程对这些系统的描述将遇到困难，而分数阶微分积分方程因更好地刻画和描述了自然现象、动态系统的变化过程而得到了广泛的应用，比如在金融领域，分数阶微分积分方程可用于描述长时间极限时的对数价格，可以更好的表现在长时间区间上价格的自然变动[1]；在医学成像领域，Hall 等[2]指出了 MRI 数据在复杂环境如人脑组织环境中的反常扩散现象，并用一类分数阶微分积分方程进行了模拟；国内学者王瑞萍等[3]研究分数阶 PD 速度控制器的永磁同步电动机控制问题。此外分数阶微分积分方程也已经被成功应用于生物、物理、化学、水文、环境等方向，因此发展分数阶微分积分方程的理论及给出相应的数值方法具有广阔的应用前景。

目前已有几种求解分数阶微分积分方程的方法，包括外推法[4]、配置法[5]和 Adomian 分解方法[6]，但是只有少数运用数值求解分数阶微分积分方程的方法，其中大多数是用有限差分方法，而这

* **收稿日期：**2017 – 05 – 16
**基金项目：**国家自然科学基金（11626074）；韩山师范学院项目（201404，Z16027，2017HJGJCJY009）
**作者简介：**郑伟珊（1983 年生），女；**研究方向：**计算数学；E-mail：weishanzheng@yeah.net

些通常都局限于低维度和有限精度的范围。近年来谱方法因其高精度受到了广泛的关注。关于谱方法的文献不少，上海大学郭本瑜等[7]创建了在非均匀 Jacobi 权 Sobolev 空间中 Jacobi 逼近的正交投影和配置理论，这对谱方法中的数值误差估计分析具有重要的作用。香港汤涛等专家提供了大量基本的谱算法及相应的收敛性及误差分析理论，这些常应用于实际中的线性和非线性问题。陈艳萍教授等提出了用 Jacobi 谱配置法求解了一类弱奇性 Volterra 积分方程，还用 Legendre 谱配置法求解具有光滑核的第二类 Volterra 积分方程，严格证明该方法误差呈谱精度收敛，并且近年也将这些方法延拓至分数阶微分积分方程[8-9]，其中的分数阶导数为 Caputo 导数，无独有偶丁金凤等也研究基于 Caputo 导数下的含时滞的 Hamilton 系统的分数阶 Noether 理论[10]。本文所讨论的分数阶微分积分方程，其导数和积分分别为 Caputo 分数阶导数和 Riemann-Liouville 分数阶积分，具体为：

$$f^{(\gamma)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\gamma)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{(\gamma-n+1)}}\mathrm{d}\tau \quad (1)$$

$$I^{\gamma}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_a^t(t-\tau)^{\gamma-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (2)$$

其中 $t\in[a,b]$，$\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数，$n$ 为任意正整数且 $n-1<\gamma<n$。结合式（1）和式（2）可以得到

$$I^{\gamma}(f^{(\gamma)}(t))=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}f^{(k)}(a)\frac{t^k}{k!} \quad (3)$$

下面给出本文所研究的方程形式：

$$y^{(\gamma)}(t)=y(t)+\int_0^{qt^2}\hat{K}(t,\tau)y(\tau)\mathrm{d}\tau+\hat{g}(t) \quad (4)$$

其中 $y(0)=y_0$，$t\in[0,T]$，源函数 $\hat{g}$ 与核函数 $\hat{K}$ 已知，$y(t)$ 未知，$y_0\in\mathbf{R}$。这里假设给定函数在对应定义域上足够光滑，$0\leqslant\tau\leqslant qt^2\leqslant t\leqslant T$，$q$ 是一个给定的常数且 $0<q<1$，$0<\gamma<1$。利用式（3），方程（4）的初始条件 $y(0)=y_0$ 可记为：

$$y(t)-y(0)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}y^{(\gamma)}(\tau)\mathrm{d}\tau \quad (5)$$

# 1 Jacobi 配置方法

## 1.1 配置点的设置

令 $\omega^{\alpha,\beta}(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ 为普通意义下的一个权函数，$\alpha,\beta>-1$，而所有 Jacobi 多项式基函数的集合 $\{J_n^{\alpha,\beta}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 构建一个完备的正交体系 $L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1)$，定义如下：

$$L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1)=\{v:v\text{ 是可测的且 }\|v\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}}<\infty\},\ \|v\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}}=\left(\int_{-1}^{1}|v(x)|^2\omega^{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

对 $\forall u,v\in L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1)$ 相应的内积为：

$$(u,v)_{\omega^{\alpha,\beta}}=\int_{-1}^{1}u(x)v(x)\omega^{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x$$

接下来引入 $H^m_{\omega^{\alpha,\beta}}$ 空间，对于非负整数 $m$，

$$H^m_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1)=\{v:\partial_x^k v\in L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1),0\leqslant k\leqslant m\}$$

相应的范数定义为：

$$\|v\|_{H^m_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1)}=\left(\sum_{k=0}^{m}\|\partial_x^k v\|^2_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

对于任意给定的正整数 $N$，记全体 Legendre-Gauss 点为 $\{\theta_k\}_{k=0}^{N}$，其权为 $\{\omega_k\}_{k=0}^{N}$，则 Legendre-Guass 积分法则为：

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{N}f(\theta_k)\omega_k \quad (6)$$

相应地将 Jacobi-Guass 点记为 $\{\tilde{\theta}_k\}_{k=0}^{N}$，Jacobi 权记为 $\{\omega_k^{\alpha,\beta}\}_{k=0}^{N}$，则 Jacobi-Guass 积分法则为

$$\int_{-1}^{1}f(x)\omega^{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{N}f(\tilde{\theta}_k)\omega_k^{\alpha,\beta} \quad (7)$$

## 1.2 积分区间的转换

下面对式（4）和式（5）进行变量代换，令 $t=\frac{T}{2}(1+x)$，$\tau=\frac{T}{2}(1+s)$，倘若再记

$$u(x)=y\left(\frac{T}{2}(1+x)\right),$$

$$u^{(\gamma)}(x)=y^{(\gamma)}\left(\frac{T}{2}(1+x)\right),$$

$$g(x)=\hat{g}\left(\frac{T}{2}(1+x)\right),$$

$$K(x,s)=\frac{T}{2}\hat{K}\left(\frac{T}{2}(1+x),\frac{T}{2}(1+s)\right)$$

则有

$$u^{(\gamma)}(x)=u(x)+\int_{-1}^{\frac{qT(1+x)^2}{2}-1}K(x,s)u(s)\mathrm{d}s+g(x) \quad (8)$$

$$u(x)-u(-1)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}\int_{-1}^{x}(x-s)^{\gamma-1}u^{(\gamma)}(s)\mathrm{d}s \quad (9)$$

其中 $x\in[-1,1]$，若令 $-\mu=\gamma-1$，用 $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ 表示一组配置点，它是 $N+1$ 个 Jacobi-Gauss 点，相应的权记为 $\omega^{-\mu,-\mu}$，则方程（8）和方程（9）在配置点 $x_i$ 上显然成立：

$$u^{(\gamma)}(x_i)=u(x_i)+\int_{-1}^{\frac{qT(1+x_i)2}{2}-1}K(x_i,s)u(s)\mathrm{d}s+g(x_i) \quad (10)$$

$$u(x_i)=u(-1)+\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{T}{2}\right)^{\gamma}\int_{-1}^{x_i}(x_i-\tilde{s})^{-\mu}u^{(\gamma)}(\tilde{s})\mathrm{d}\tilde{s} \tag{11}$$

对于方程（10）和方程（11），当 $x_i$ 很小时，对 $u(s)$，$u^{(\gamma)}(\tilde{s})$ 几乎没有可以应用的信息，故要获得高阶精度特别困难，为此通过如下线性变换将两积分区间转化成固定区间［-1，1］，令

$$s(x,\theta)=\frac{qT(1+x)^2}{4}\theta+\frac{qT(1+x)^2}{4}-1 \tag{12}$$

$$\tilde{s}(x,\theta)=\frac{1+x}{2}\theta+\frac{x-1}{2} \tag{13}$$

其中 $-1\leqslant\theta\leqslant1$，则方程（10）和方程（11）可以重记为：

$$u^{(\gamma)}(x_i)=u(x_i)+\int_{-1}^{1}\tilde{K}(x_i,s(x_i,\theta))u(s(x_i,\theta))\mathrm{d}\theta+g(x_i) \tag{14}$$

$$u(x_i)=u(-1)+\frac{T^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{1+x_i}{4}\right)^{\gamma}\cdot\int_{-1}^{1}(1-\theta)^{-\mu}u^{(\gamma)}(\tilde{s}(x_i,\theta))\mathrm{d}\theta \tag{15}$$

其中 $\tilde{K}(x,s(x,\theta))=\frac{qT(1+x)}{2}K(x,s(x,\theta))$。

### 1.3　运用高斯求积公式求近似解

下面应用高斯积分法则近似处理方程（14）和方程（15），首先对于方程（14），用 legendre-Gauss 积分法则（6）近似计算：

$$u^{(\gamma)}(x_i)\approx u(x_i)+\sum_{k=0}^{N}\tilde{K}(x_i,s(x_i,\theta_k))\cdot u(s(x_i,\theta_k))\omega_k+g(x_i) \tag{16}$$

而相应方程（15）可近似为：

$$u(x_i)\approx u(-1)+\frac{T^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{1+x_i}{4}\right)^{\gamma}\cdot\sum_{k=0}^{N}u^{(\gamma)}(s(x_i,\tilde{\theta}_k))\omega_k^{-u,0} \tag{17}$$

其中 $\{\tilde{\theta}_k\}_{k=0}^{N}$ 是一组 Jacobi-Gauss 点，相应的权为 $\{\omega_k^{-\mu,0}\}_{k=0}^{N}$。

用 $u_i\approx u(x_i)$，$u_i^{\gamma}\approx u^{(\gamma)}(x_i)$，$0\leqslant i\leqslant N$，并且记

$$U(x)=\sum_{j=0}^{N}u_jF_j(x),U^{\gamma}(x)=\sum_{j=0}^{N}u_j^{\gamma}F_j(x) \tag{18}$$

其中 $F_j(x)$，$j=0,1,\cdots,N$ 是以 Jacobi-Gauss 点 $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ 为插值点的 Lagrange 插值基函数，Jacobi 谱配置方法即寻求 $U(x)$，$U^{\gamma}(x)$ 使得满足如下方程：

$$u_i^{\gamma}=u_i+\sum_{k=0}^{N}\tilde{K}(x_i,s(x_i,\theta_k))\cdot U(s(x_i,\theta_k))\omega_k+g(x_i)=u_i+\sum_{j=0}^{N}u_j\left(\sum_{k=0}^{N}\tilde{K}(x_i,s(x_i,\theta_k))\cdot F_j(s(x_i,\theta_k))\omega_k^{0,0}\right)+g(x_i) \tag{19}$$

$$u_i=u(-1)+\frac{T^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{1+x_i}{4}\right)^{\gamma}\cdot\left(\sum_{k=0}^{N}u^{\gamma}(\tilde{s}(x_i,\tilde{\theta}_k))\omega_k^{-u,0}\right)=u(-1)+\frac{T^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{1+x_i}{4}\right)^{\gamma}\cdot\sum_{j=0}^{N}u_j^{\gamma}\left(\sum_{k=0}^{N}F_j(\tilde{s}(x_i,\tilde{\theta}_k))\omega_k^{-u,0}\right) \tag{20}$$

## 2　基本引理

在这一节将介绍一些在对随后定理证明有帮助的引理，这里 $I=(-1,1)$。

**引理 1**[11]　假设用带 Jacobi 权 $N+1$ 个点的 Gauss 积分公式计算 $u\varphi$ 的积分，其中，$u\in H_{\omega^{\alpha,\beta}}^{m}(I)$，$m\geqslant1$，$-1<\alpha,\beta<1$，且 $\varphi\in P_N$，则存在一个不依赖 $N$ 与的常数 $C$，使得

$$|(u,\varphi)_{\omega^{\alpha,\beta}}-(u,\varphi)_N|\leqslant CN^{-m}|u|_{H_{\omega^{\alpha,\beta}}^{m,N}(I)}\|\varphi\|_{L_{\omega^{\alpha,\beta}}^{2}(I)} \tag{21}$$

其中

$$|u|_{H_{\omega^{\alpha,\beta}}^{m,N}(I)}=\left(\sum_{j=\min(m,N+1)}^{m}\|\partial_x^{(j)}u\|_{L_{\omega^{\alpha,\beta}}^{2}(I)}^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

$$(u,\varphi)_N=\sum_{j=0}^{N}u(x_j)\varphi(x_j)\omega_j \tag{23}$$

**引理 2**[11-12]　假设 $u\in H_{\omega^{-\mu,-\mu}}^{m}(I)$，并用 $I_Nu$ 表示以 $N+1$ 个权为 $\omega^{-\mu,-\mu}$ 的 Jacobi-Gauss 点 $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ 为插值基点的插值多项式，即 $I_Nu=\sum_{i=0}^{N}u(x_i)F_i(x)$，则

$$\|u-I_Nu\|_{L_{\omega^{-\mu,-\mu}}^{2}(I)}\leqslant CN^{-m}|u|_{H_{\omega^{-\mu,-\mu}}^{m,N}(I)} \tag{24}$$

$$\|u-I_Nu\|_{L^{\infty}(I)}\leqslant\begin{cases}CN^{1-\mu-m}|u|_{H_{\omega^{c}}^{m,N}(I)}, & 0\leqslant\mu<\frac{1}{2},\\ CN^{\frac{1}{2}-m}\log N|u|_{H_{\omega^{c}}^{m,N}(I)}, & \frac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases} \tag{25}$$

这里 $\omega^{c}=\omega^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$。

**引理 3**[13]　假设 $\{F_j(x)\}_{j=0}^{N}$ 是以 Jacobi-Gauss 点为插值基点的 Lagrange 插值多项式，则

$$\|I_N\|_{L^\infty(I)} \leqslant \max_{x\in[-1,1]} \sum_{j=0}^{N} |F_j(x)| = \begin{cases} O(N^{\frac{1}{2}-\mu}), & 0 \leqslant \mu < \frac{1}{2}, \\ O(\log N), & \frac{1}{2} \leqslant \mu < 1 \end{cases} \tag{26}$$

**引理 4**[14] 假设 $u(x)$ 是一个定义在 $[-1,1]$ 上的非负局部可积函数满足：$u(x) \leqslant v(x) + L\int_{-1}^{x} u(\tau)\mathrm{d}\tau$，这里 $L \geqslant 0$ 是一个常数，$v(x)$ 也是一个可积函数，则存在一个常数 $C$ 使得 $u(x) \leqslant v(x) + C\int_{-1}^{x} v(\tau)\mathrm{d}\tau$，且

$$\|u(x)\|_{L^\infty(-1,1)} \leqslant C\|v(x)\|_{L^\infty(-1,1)} \tag{27}$$

$$\|u(x)\|_{L^p_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1)} \leqslant C\|v(x)\|_{L^p_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1)} \tag{28}$$

**引理 5** 如果一个非负可积函数 $E(x)$ 满足 $E(x) \leqslant L\int_{-1}^{\frac{qT(1+x)2}{2}-1} E(\tau)\mathrm{d}\tau + J(x)$，其中 $-1 \leqslant x \leqslant 1$，$J(x)$ 是一个可积函数，则存在一个常数 $C$ 使得

$$\|E\|_{L^\infty(-1,1)} \leqslant C\|J\|_{L^\infty(-1,1)} \tag{29}$$

$$\|E\|_{L^p_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1)} \leqslant C\|J\|_{L^p_{\omega^{\alpha,\beta}}(-1,1)} \tag{30}$$

**证明** 因为

$$\frac{qT(1+x)^2}{2} - 1 = \frac{2}{T}q\left(\frac{T}{2}(1+x)\right)^2 - 1 = \frac{2}{T}qt^2 - 1 \leqslant \frac{2}{T}t - 1 = \frac{2}{T}\frac{T}{2}(1+x) - 1 = x$$

故有

$$E(x) \leqslant L\int_{-1}^{\frac{qT(1+x)2}{2}-1} E(\tau)\mathrm{d}\tau + J(x) \leqslant L\int_{-1}^{x} E(\tau)\mathrm{d}\tau + J(x)$$

再由引理 4 获得所要证明结论。

**引理 6**[15-16] 对于一个非负整数 $r$ 和 $k \in (0,1)$，存在一个常数 $C_{r,k} > 0$，使得对于任意函数 $v \in C^{r,k}([-1,1])$ 都存在一个多项式函数 $T_N v \in P_N$，使得

$$\|v - T_N v\|_{L^\infty(I)} \leqslant C_{r,k} N^{-(r+k)} \|v\|_{r,k} \tag{31}$$

其中 $\|\cdot\|_{r,k}$ 是在 $C^{r,k}([-1,1])$ 空间的标准范数，而 $T_N$ 是一个从 $C^{r,k}([-1,1])$ 映到 $P_N$ 的线性算子。

**引理 7**[17] $k \in (0,1)$，$0 < k < 1 - \mu$，定义

$$M: (Mv)(x) = \int_{-1}^{x} (x-\tau)^{-\mu} K(x,\tau) v(\tau)\mathrm{d}\tau$$

则对于任意函数 $v \in C([-1,1])$，都存在一个正的常数 $C$ 使得

$$\frac{|Mv(x') - Mv(x'')|}{|x' - x''|^k} \leqslant C \max_{x\in[-1,1]} |v(x)|$$

这里任意的 $x', x'' \in [-1,1]$ 且 $x' \neq x''$，这意味着 $\|Mv\|_{0,k} \leqslant C \max_{x\in[-1,1]} |v(x)|$。

**引理 8**[18] 对于每个有界函数 $v$，都存在一个独立于 $v$ 的常数 $C$，使得

$$\sup_N \left\| \sum_{j=0}^{N} v(x_j) F_j(x) \right\|_{L^2_{\omega^{\alpha,\beta}}(I)} \leqslant C \max_{x\in[-1,1]} |v(x)|$$

**引理 9**[19] 对所有可测函数 $f \geqslant 0$，当 $1 < p \leqslant q < \infty$ 时，都有如下广义 Hardy 不等式

$$\left(\int_a^b |(Tf)(x)|^q u(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p v(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

成立当且仅当 $\sup_{a<x<b}\left(\int_x^b u(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_a^x v^{1-p'}(t)\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$，$p' = \frac{p}{p-1}$，这里的函数 $T$ 是一个算子：$(Tf)(x) = \int_a^x k(x,t)f(t)\mathrm{d}t$，其中函数 $k(x,t)$ 是一个给定的核函数，$u$ 和 $v$ 都是非负的权函数且 $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$。

## 3 收敛分析

本节将进行收敛性分析，其目标是证明方程的精确解与逼近解以及精确导数与逼近导数之间的误差均呈指数收敛。首先将 $L^\infty(I)$ 空间上的进行收敛性分析。

**定理 1** 令 $u(x)$ 是分数阶微分积分方程（8）和（9）的精确解，并假定足够光滑，倘若 $U(x)$ 和 $U^\gamma(x)$ 是通过谱配置方法由方程（18）联合方程（19），（20）所获得的逼近解及逼近导数，如果 $0 < \gamma < 1$，$u \in H^{m+1}_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)$，则有

$$\|U^\gamma(x) - u^{(\gamma)}(x)\|_{L^\infty(I)} \leqslant \begin{cases} CN^{\gamma-\frac{1}{2}-m}(K^*\|u\|_{L^2(I)} + N^{\frac{1}{2}}\Omega), & \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ CN^{-m}\log N(K^*\|u\|_{L^2(I)} + N^{\frac{1}{2}}\Omega), & 0 < \gamma \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{32}$$

$$\|U(x) - u(x)\|_{L^\infty(I)} \leqslant \begin{cases} CN^{\gamma-\frac{1}{2}-m}(K^*\|u\|_{L^2(I)} + N^{\frac{1}{2}}\Omega), & \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ CN^{-m}\log N(K^*\|u\|_{L^2(I)} + N^{\frac{1}{2}}\Omega), & 0 < \gamma \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{33}$$

其中 $N$ 足够大，$C$ 是独立于 $N$ 但依赖 $K(x,s)$ 和 $\mu$ 的常数，

$$K^* = \max_{x\in[-1,1]} |K(x,s(x,\theta))|_{H^{m;M}_{\omega^{0,0}}(I)} \tag{34}$$

$$\Omega = |u^{(\gamma)}|_{H^{m,M}_{\omega^c}(I)} + |u|_{H^{m,M}_{\omega^c}(I)} \tag{35}$$

**证明**　利用离散内积（23），令

$$(\tilde{K}(x_i,s(x_i,\cdot)),\varphi(s(x_i,\cdot)))_N = \sum_{k=0}^{N}\tilde{K}(x_i,s(x_i,\theta_k))\varphi(s(x_i,\theta_k))\omega_k \tag{36}$$

又由于 $U^\gamma(x) = \sum_{j=0}^{N} u_j^\gamma F_j(x) \in P_N$，有

$$\int_{-1}^{1}(1-\theta)^{-\mu}U^\gamma(s)\mathrm{d}s = \sum_{k=0}^{N}U^\gamma(s(x_i,\tilde{\theta}_k))\omega_k^{-\mu,0}$$

因此数值方法（19）和（20）可以写为

$$u_i^\gamma = u_i + (\tilde{K}(x_i,s),U(s))_N + g(x_i) \tag{37}$$

$$u_i = \frac{T^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{1+x_i}{4}\right)^\gamma \cdot \int_{-1}^{1}(1-\theta)^{-\mu}U^\gamma(s)\mathrm{d}s + u(-1) \tag{38}$$

进一步可将式（37）化为：

$$u_i^\gamma = u_i + (\tilde{K}(x_i,s),U(s))_{\omega^{0,0}} + g(x_i) + I_{i,1} \tag{39}$$

其中 $I_{i,1} = (\tilde{K}(x_i,s),U(s))_N - (\tilde{K}(x_i,s),U(s))_{\omega^{0,0}}$。

记误差函数 $e(x) = U(x) - u(x)$，$e^\gamma(x) = U^\gamma(x) - u^{(\gamma)}(x)$，利用引理 1，有

$$|I_{i,1}(x)| \leqslant CN^{-m}\max_{x\in[-1,1]}|\tilde{K}(x,s(x,\theta))|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}(I)}\|U\|_{L^2(I)} \leqslant CN^{-m}\max_{x\in[-1,1]}|K(x,s(x,\theta))|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}(I)} \cdot (\|u\|_{L^2(I)} + \|e\|_{L^\infty(I)}) \tag{40}$$

再由式（12）和式（13）知，式（39）和式（38）分别可以化为

$$u_i^\gamma = u_i + \int_{-1}^{\frac{qT(1+x_i)2}{2}-1}K(x_i,s)U(s)\mathrm{d}s + g(x_i) + I_{i,1} \tag{41}$$

$$u_i = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{T}{2}\right)^\gamma\int_{-1}^{x_i}(x_i-s)^{-\mu}U^\gamma(s)\mathrm{d}s + u(-1) \tag{42}$$

在式（41）和式（42）两边同乘以 $\sum_{j=0}^{N}F_j(x)$ 并利用式（8）和式（9）得：

$$e^\gamma(x) = e(x) + \int_{-1}^{\frac{qT(1+x)2}{2}-1}K(x,s)e(s)\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{4}J_j(x) \tag{43}$$

$$e(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{T}{2}\right)^\gamma \cdot \int_{-1}^{x}(x-s)^{-\mu}e^\gamma(s)\mathrm{d}s + J_2(x) + J_5(x) \tag{44}$$

这里

$$J_1(x) = \sum_{i=0}^{N}I_{i,1}F_i(x),\ J_2(x) = u(x) - I_N u(x),$$

$$J_3(x) = I_N u^{(\gamma)}(x) - u^{(\gamma)}(x),$$

$$J_4(x) = I_N\int_{-1}^{\frac{qT(1+x)2}{2}-1}K(x,s)e(s)\mathrm{d}s - \int_{-1}^{\frac{qT(1+x)2}{2}-1}K(x,s)e(s)\mathrm{d}s,$$

$$J_5(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\frac{T}{2}\right)^\gamma \cdot \left(I_N\int_{-1}^{x}(x-s)^{-\mu}e^\gamma(s)\mathrm{d}s - \int_{-1}^{x}(x-s)^{-\mu}e^\gamma(s)\mathrm{d}s\right)$$

把式（44）代入式（43）中的积分项，紧接着在第一项的二重积分中先令 $s = \frac{qT(1+\xi)^2}{2} - 1$，再令 $z = \frac{qT(1+\tau)^2}{2} - 1$，然后再根据 Dirichlet 公式

$$\int_{-1}^{x}\int_{-1}^{\tau}\Phi(\tau,\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau = \int_{-1}^{x}\int_{\xi}^{x}\Phi(\tau,\xi)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi$$

得

$$|e^\gamma(x)| \leqslant LqT(1+\xi) \cdot \int_{-1}^{x}\left|e^\gamma\left(\frac{qT(1+\xi)^2}{2} - 1\right)\right|\mathrm{d}\xi + M|J(x)| \tag{45}$$

这里 $L$ 和 $M$ 是正的常数，$|J(x)| = |e(x)| + \sum_{j=1}^{5}|J_j(x)|$，而又因为

$$MqT(1+\xi)\int_{-1}^{x}\left|e^\gamma\left(\frac{qT(1+\xi)^2}{2} - 1\right)\right|\mathrm{d}\xi = M\int_{-1}^{X}\left|e^\gamma\left(\frac{qT(1+\xi)^2}{2} - 1\right)\right|\mathrm{d}\left(\frac{qT(1+\xi)^2}{2} - 1\right) = M\int_{-1}^{\frac{qT(1+x)2}{2}-1}|e^\gamma(s)|\mathrm{d}s$$

故由引理 5 有

$$\|e^\gamma(x)\|_{L^\infty(I)} \leqslant C(\|e(x)\|_{L^\infty(I)} + \sum_{j=1}^{4}\|J_j\|_{L^\infty(I)}) \tag{46}$$

再由式（44）有

$$\|e(x)\|_{L^\infty(I)} \leqslant C(\|e^\gamma(x)\|_{L^\infty(I)} + \sum_{j=2,5}\|J_j\|_{L^\infty(I)}) \tag{47}$$

综上得

$$\|e^\gamma(x)\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\sum_{j=1}^{5}\|J_j\|_{L^\infty(I)} \tag{48}$$

$$\|e(x)\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\sum_{j=1}^{5}\|J_j\|_{L^\infty(I)} \tag{49}$$

下面对式（48）及式（49）右端逐项进行误差估计，首先利用引理 3、式（40）和式（49），有

$$\|J_1\|_{L^\infty(I)} \leqslant$$

$$\begin{cases} CN^{\frac{1}{2}-\mu}\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}|I_{i,1}|, & 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ C\log N\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}|I_{i,1}|, & \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases} \leqslant$$

$$\begin{cases} CN^{\frac{1}{2}-\mu-m}\max\limits_{x\in[-1,1]}|K(x,s(x,\theta))|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}}(\|u\|_{L^2(I)} + \\ \quad \|e^\gamma(x)\|_{L^\infty(I)} + \sum\limits_{j=2,5}\|J_j(x)\|_{L^\infty(I)}), 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ CN^{-m}\log N\max\limits_{x\in[-1,1]}|K(x,s(x,\theta))|_{H^{m,N}_{\omega^{0,0}}}(\|u\|_{L^2(I)} + \\ \quad \|e^\gamma(x)\|_{L^\infty(I)} + \sum\limits_{j=2,5}\|J_j(x)\|_{L^\infty(I)}), \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases} \tag{50}$$

又由引理 2 中的式（25）有

$$\|J_2\|_{L^\infty(I)} \leqslant \begin{cases} CN^{1-\mu-m}|u|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)}, 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ CN^{\frac{1}{2}-m}\log N|u|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)}, \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases} \tag{51}$$

$$\|J_3\|_{L^\infty(I)} \leqslant \begin{cases} CN^{1-\mu-m}|u^{(\gamma)}|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)}, 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ CN^{\frac{1}{2}-m}\log N|u^{(\gamma)}|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)}, \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases}$$

再次利用引理 2 中的式（25），并令 $m=1$，有

$$|J_4|_{L^\infty(I)} \leqslant$$

$$\begin{cases} CN^{-\mu}\left|\displaystyle\int_{-1}^{\frac{qT(1+x)2}{2}-1}K(x,s)e(s)\mathrm{d}s\right|_{H^{1,N}_{\omega^c}(-1,1)},\\ \quad 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ CN^{-\frac{1}{2}}\log N\left|\displaystyle\int_{-1}^{\frac{qT(1+x)2}{2}-1}K(x,s)e(s)\mathrm{d}s\right|_{H^{1,N}_{\omega^c}(-1,1)},\\ \quad \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases} \leqslant$$

$$\begin{cases} CN^{-\mu}|e|_{L^\infty(I)}, 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ CN^{-\frac{1}{2}}\log N|e|_{L^\infty(I)}, \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases} \leqslant$$

$$\begin{cases} CN^{-\mu}(|e^\gamma(x)|_{L^\infty(I)} + \sum\limits_{j=2,5}|J_j(x)|_{L^\infty(I)},\\ \quad 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ CN^{-\frac{1}{2}}\log N(|e^\gamma(x)|_{L^\infty(I)} + \sum\limits_{j=2,5}|J_j(x)|_{L^\infty(I)},\\ \quad \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases} \tag{52}$$

现估计 $J_5(x)$，根据引理 7 令 $K(x,\tau)=\dfrac{1}{\Gamma(\gamma)}\left(\dfrac{T}{2}\right)^\gamma$，同时利用引理 3，引理 6，有

$$\begin{aligned}&\|J_5\|_{L^\infty(I)} = \|(I_N-I)Me^\gamma\|_{L^\infty(I)} = \\ &\|(I_N-I)(Me^\gamma - T_NMe^\gamma)\|_{L^\infty(I)} \leqslant \\ &(1+\|I_N\|_{L^\infty(I)})CN^{-k}\|Me^\gamma\|_{0,k} \leqslant \\ &\begin{cases} CN^{\frac{1}{2}-\mu-k}\|e^\gamma\|_{L^\infty(I)}, & 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ CN^{-k}\log N\|e^\gamma\|_{L^\infty(I)}, & \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases}\end{aligned} \tag{53}$$

最后一个不等式，我们在以下情况下使用引理 6

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\mu<k<1-\mu, 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ 0<k<1-\mu, \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases}$$

假设 $N$ 足够大，由式（50）－式（53），有

$$\|U^\gamma(x)-u^{(\gamma)}(x)\|_{L^\infty(I)} \leqslant$$

$$\begin{cases} CN^{\frac{1}{2}-\mu-m}(K^*\|u\|_{L^2(I)} + \\ \quad N^{\frac{1}{2}}(|u^{(\gamma)}|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)} + |u|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)})),\\ \quad 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ CN^{-m}\log N(K^*\|u\|_{L^2(I)} + \\ \quad N^{\frac{1}{2}}(|u^{(\gamma)}|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)} + |u|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)})),\\ \quad \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1;\end{cases}$$

$$\|U(x)-u(x)\|_{L^\infty(I)} \leqslant$$

$$\begin{cases} CN^{\frac{1}{2}-\mu-m}(K^*\|u\|_{L^2(I)} + \\ \quad N^{\frac{1}{2}}(|u^{(\gamma)}|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)} + |u|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)})),\\ \quad 0<\mu<\dfrac{1}{2},\\ CN^{-m}\log N(K^*\|u\|_{L^2(I)} + \\ \quad N^{\frac{1}{2}}(|u^{(\gamma)}|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)} + |u|_{H^{m;N}_{\omega^c}(I)})),\\ \quad \dfrac{1}{2}\leqslant\mu<1\end{cases}$$

由 $\gamma=1-\mu$ 可以得到所需的估计（32）和（33）。接下来将在 $L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)$ 上进行收敛性分析。

**定理 2** 如果定理 1 中给出的假设成立，且 $N$ 足够大，则有

$$\|U^\gamma(x)-u^{(\gamma)}(x)\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant$$

$$\begin{cases} CN^{-m}(V_1 + N^{\gamma-\frac{1}{2}-k}V_2 + V_3 + N^{\gamma-k}\Omega), \\ \quad \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ CN^{-m}(V_1 + N^{-k}\log NV_2 + V_3 + N^{\frac{1}{2}-k}\log N\Omega), \\ \quad 0 < \gamma \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{54}$$

$$\|U(x) - u(x)\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant$$

$$\begin{cases} CN^{-m}(V_1 + N^{\gamma-\frac{1}{2}-k}V_2 + V_3 + N^{\gamma-k}\Omega), \\ \quad \frac{1}{2} < \gamma < 1, \\ CN^{-m}(V_1 + N^{-k}\log NV_2 + V_3 + N^{\frac{1}{2}-k}\log N\Omega), \\ \quad 0 < \gamma \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \tag{55}$$

这里 $k \in (0,\gamma)$，$C$ 是独立于 $N$ 的常数，而

$$V_1 = K^*(\|u\|_{L^2(I)} + |u^{(\gamma)}|_{H^{1;N}_{\omega^c}(I)} + |u|_{H^{1;N}_{\omega^c}(I)}),$$

$$V_2 = K^*\|u\|_{L^2(I)},$$

$$V_3 = |u^{(\gamma)}|_{H^{m;N}_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} + |u|_{H^{m;N}_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)}$$

**证明**　根据式（44）和式（45），利用引理 5 的结论和引理 9 广义的 Hardy 不等式有

$$\|e^\gamma\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant C\sum_{j=1}^{5}\|J_j\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \tag{56}$$

$$\|e\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant C\sum_{j=1}^{5}\|J_j\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \tag{57}$$

现在使用引理 8，可得

$$\|J_1\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant C\max_{x\in[-1,1]}|I(x)| \leqslant CN^{-m}K^*(\|u\|_{L^2(I)} + \|e\|_{L^\infty(I)}) \tag{58}$$

再根据定理 1（令 $m = 1$）的收敛结果，有

$$\|e\|_{L^\infty(I)} \leqslant C(|u^{(\gamma)}|_{H^{1;N}_{\omega^c}(I)} + |u|_{H^{1;N}_{\omega^c}(I)} + \|u\|_{L^2(I)})$$

故

$$\|J_1\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant CN^{-m}K^*(|u^{(\gamma)}|_{H^{1;N}_{\omega^c}(I)} + |u|_{H^{1;N}_{\omega^c}(I)} + \|u\|_{L^2(I)}) \tag{59}$$

由引理 2 中的式（24）可以得到

$$\|J_2\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant CN^{-m}|u|_{H^{m;N}_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)},$$

$$\|J_3\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant CN^{-m}|u^{(\gamma)}|_{H^{m;N}_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \tag{60}$$

对于 $J_4(x)$ 的估计，使用引理 2 中的式（24）并令 $m = 1$ 时，得

$$\|J_4\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant CN^{-1}\left|\int_{-1}^{\frac{qT(1+x)2}{2}-1}k(x,s)e(s)\,\mathrm{d}s\right|_{H^{1;N}_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant CN^{-1}\|e\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}} \tag{61}$$

对于 $J_5(x)$ 的估计，借助引理 6，引理 7 和引理 8，且当 $k \in (0,1-\mu)$ 有

$$\|J_5\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} = \|(I_N - I)Me^\gamma\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} = \|(I_N - I)(Me^\gamma - T_NMe^\gamma)\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant \|I_N(Me^\gamma - T_Ne^\gamma)\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} + \|(Me^\gamma - T_Ne^\gamma)\|_{L^2_{\omega^{-\mu,-\mu}}(I)} \leqslant C\|(Me^\gamma - T_Ne^\gamma)\|_{L^\infty(I)} \leqslant CN^{-k}\|Me^\gamma\|_{0,k} \leqslant CN^{-k}\|e^\gamma\|_{L^\infty(I)} \leqslant$$

$$\begin{cases} CN^{\frac{1}{2}-\mu-m-k}(K^*\|u\|_{L^2(I)} + N^{\frac{1}{2}}\Omega), \\ \quad 0 < \mu < \frac{1}{2}, \\ CN^{-m-k}\log N(K^*\|u\|_{L^2(I)} + N^{\frac{1}{2}}\Omega, \\ \quad \frac{1}{2} \leqslant \mu < 1 \end{cases} \tag{62}$$

最后一个不等号利用定理 1 的收敛性结果，故当 $N$ 足够大，联合式（56）－（57）、式（59）－（62）即可得定理所要证明的结论（54）和（55），其中 $\gamma = 1 - \mu$。

## 参考文献：


[1] MEERSCHAERT M M, SCALAS E. Coupled continuous time random walks in finance [J]. Physica A, 2006, 370(1): 114－118.

[2] HALL M G, BARRICK T R. From diffusion-weighted MRI to anomalous diffusion imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine, 2008, 59(3): 447－455.

[3] 王瑞萍，皮佑国．基于分数阶 PD 速度控制器的永磁同步电动机控制研究[J]．中山大学学报(自然科学版), 2013, 52(3): 34－39.
WANG R P, PI Y G. Research on fractional-order PD speed controller for PMSM [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2013, 52(3): 34－39.

[4] DIETHELM K, WALZ G. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation [J]. Numerical Algorithms, 1997, 16(3/4): 231－253.

[5] RAWASHDEH E A. Numerical solution of fractional integro-differential equations by collocation method [J]. Appl Math Comp, 2006, 176(1): 1－6.

[6] SHAWAGFEH N T. Analytical approximate solutions for nonlinear fractional differential equations [J]. Appl Math Comp, 2002, 131(2/3): 517－529.

[7] GUO B Y, WANG L L. Jacobi approximations in nonuniformly Jacobi-weighted Sobolev spaces [J]. Journal of Approximation Theory, 2004, 128(1): 1－41.

[8] YANG Y, CHEN Y P, HUANG Y Q. Convergence analysis of the Jacobi spectral-collocation method for fractional integro-differential equations [J]. Acta Mathematica Scientia, 2014, 34B (3): 673 – 690.

[9] YANG Y, CHEN Y P, HUANG Y Q. Spectral-collocation method for fractional Fredholm integro-differential equations [J]. Korean Math Soc, 2014, 51(1): 254 – 278.

[10] 丁金凤,金世欣,张毅. 基于 Caputo 导数下的含时滞的 Hamilton 系统的分数阶 Noether 理论[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(6): 79 – 85.
DING J F, JIN S X, ZHANG Y. Fractional Noether theorems for Hamilton system with time delay based on Caputo dervitaves [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(6): 79 – 85.

[11] CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTERONI A, et al. Spectral methods fundamentals in single domains [M]. Springer-Verlag, 2006.

[12] WEI Y X, CHEN Y P. Convergence analysis of the spectral methods for weakly singular Volterra integro-differential equations with smooth solutions [J]. Adv Appl Math Mech, 2012, 4(1): 1 – 20.

[13] MASTROIANNI G, OCCORSIO D. Optimal systems of nodes for Lagrange interpolation on bounded intervals. A survey [J]. J Comput Appl Math, 2001, 134(1): 325 – 341.

[14] HENRY D. Geometric theory of semilinear parabolic equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[15] RAGOZIN D L. Polynomial approximation on compact manifolds and homogeneous spaces [J]. Trans Amer Math Soc, 1970, 150(1): 41 – 53.

[16] RAGOZIN D L. Constructive polynomial approximation on spheres and projective spaces [J]. Trans Amer Math Soc, 1971, 162(NDEC): 157 – 170.

[17] COLTON D, KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory // Applied mathematical sciences [M]. 2nd ed. Heidelberg: Springer-Verlag, 1998.

[18] NEVAI P. Mean convergence of Lagrange interpolation: III [J]. Numerische Mathematik, 1991, 43(1): 195 – 218.

[19] KUFNER A, PERSSON L E. Weighted inequalities of Hardy type [M]. New York: World Scientific, 2003.